FEHLERRECHNUNG

Meßgröße: x; absoluter Fehler Δx; relativer Fehler $\frac{\Delta x}{x}$.
Beispiel: $U = 10{,}5\,V \pm 0{,}3V$ d.h. $\Delta U = 0{,}3V$; $\frac{\Delta U}{U} = 0{,}03 = 3\%$.

I. Man unterscheidet:

a) Systematische Fehler

Bedingt durch falsche Eichung der Meßgeräte oder durch das Meßverfahren.

Beispiele: Ladungen gehen bei hoher Luftfeuchtigkeit verloren, Energieverluste durch Reibung usw.

Abhilfe: Prüfung der Meßgeräte, kritische Analyse des Meßverfahrens.
Durch Wiederholung unter den gleichen Bedingungen kann der syst. Fehler nicht verkleinert werden!

b) Zufällige oder statistische Fehler

Bedingt durch Ableseungenauigkeiten, falsches Einstellen usw.

Abhilfe: Durch mehrfaches Wiederholen der Messung und Berechnung des Mittelwertes. (Meßreihe)

Bei n Messungen ist der zufällige Fehler des Mittelwertes um den Faktor $\sqrt{n}$ kleiner als der zufällige Fehler der einzelnen Messung.

II. Maximalfehler von direkt gemessenen Größen (nicht berechnet)

a) Abschätzen der maximalen systematischen Fehler: $\Delta x_{syst.,max}$

Nach Angaben auf der Meßgeräten;
Sonst: auf einer Skala etwa bis 0,25 Skalenteile, bei einer Stoppuhr 0,2 sec.

b) Abschätzen der maximalen zufälligen Fehler: $\Delta x_{zuf.,max}$

Näherungsweise: die maximale Abweichung zweier Werte einer Meß-Reihe.

Genauer: Mit Hilfe statistischer Verfahren.
(Auf manchen Taschenrechnern möglich!)
Dabei rechnet man mit folgenden Formeln:

Anzahl der Messungen:	n
Mittelwert:	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
Standardabweichung der Einzelmessung:	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}}$
Standardabweichung des Mittelwertes:	$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
maximaler zufälliger Fehler des Mittelwetes:	$\Delta x_{zuf.,max} \approx 3 \cdot \bar{s}$

Bedeutung der Standardabweichung:

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Einzelmessung (bzw. der Mittelwert) weniger als s (bzw. $\bar{s}$) vom wahren Wert abweicht, beträgt 68 %.

Beispiel:

Meßreihe:

x_1	1,87	x_7	1,69
x_2	1,75	x_8	1,73
x_3	1,73	x_9	1,91
x_4	1,92	x_{10}	1,70
x_5	1,63	x_{11}	1,64
x_6	1,84	x_{12}	1,90

Anzahl der Messungen

$n = 12$

Grob:

$\Delta x_{max} = 1{,}92 - 1{,}63 = 0{,}29$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = 1{,}78$$

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ldots\ldots + (x_n-\bar{x})^2}{(n-1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 3{,}1 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta x_{max} \approx 3 \cdot \bar{s} = 9{,}3 \cdot 10^{-2} = 0{,}09$$

d.h. Mit 99,7% Wahrscheinlichkeit ist der statistische Fehler des Mittelwertes kleiner als Δx_{max} = 0,09

c) Maximaler Gesamtfehler: $\Delta x_{ges.,max}$

$$\Delta x_{ges.,max} = \sqrt{\Delta x^2_{syst,max} + \Delta x^2_{zuf.,max}}$$

Faustregel: Ist einer der Fehler etwa dreimal so groß wie der andere, so kann der kleinere Fehler vernachlässigt werden!

III. Berechnung des Fehlers für ein zusammengesetztes Ergebnis aus den Fehlern der Einzelmessungen (Fehlerfortpflanzung)

1. Allgemein (meist recht aufwendig)

U (Ergebnis) ist eine Funktion der Einzelwerte x, y, z, ...

$U=F(x,y,z,...)$ z.B.: $R = \frac{U}{I}$ also $R=F(U,I)$

dann gilt:

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2 \ldots}$$

Wobei z.B. $\frac{\partial U}{\partial x}$ die (partielle) Ableitung der Funktion U nach der Variablen x ist.

2. Vereinfachte Formen

a) Die gesuchte Größe ist Summe oder Differenz von Einzelwerten:

$U = x \pm y \pm z \pm \ldots$ dann gilt:

$$\boxed{\Delta U = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \ldots}}$$

b) Die gesuchte Größe ist Produkt von Potenzen der Einzelwerte:

$U = x^n \cdot y^m \cdot z^k \cdot \ldots$

$$\boxed{\Delta U = U \cdot \sqrt{n^2\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + m^2\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + k^2\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \ldots}}$$

Beispiele:

a) $s = x - y$; $\Delta x = 1{,}0\,\text{cm}$; $\Delta y = 1{,}3\,\text{cm}$ dann ist

$$\Delta s = \sqrt{(1{,}0\,\text{cm})^2 + (1{,}3\,\text{cm})^2} = 1{,}64\ \text{cm}$$

b) $R = \frac{U}{I}$; $\overline{U} = 10{,}0$ V; $\overline{I} = 1{,}0$ A; also $\overline{R} = 10\ \Omega$

$\Delta U = 1{,}2$ V; $\Delta I = 0{,}3$ A

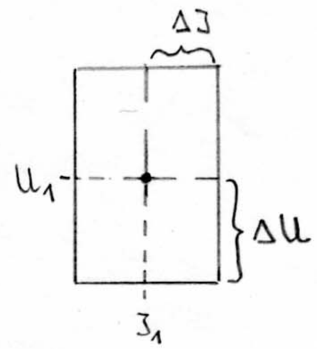
$$\Delta R = R\sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} = 10\,\Omega \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}2\,V}{10\,V}\right)^2 + \left(\frac{0{,}3\,A}{1\,A}\right)^2} = 3{,}2\,\Omega$$

c) $W_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$; $\Delta W_{kin} = W_{kin}\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2}$

IV. Graphische Auswertung von Meßergebnissen bei linearem Zusammenhang

Beispiel: Messung von I und U. Bestimmung von R als Steigung der Geraden U=R•I.

1. Die Meßpunkte werden mit Fehlerrechtecken im Koordinatensystem eingetragen.

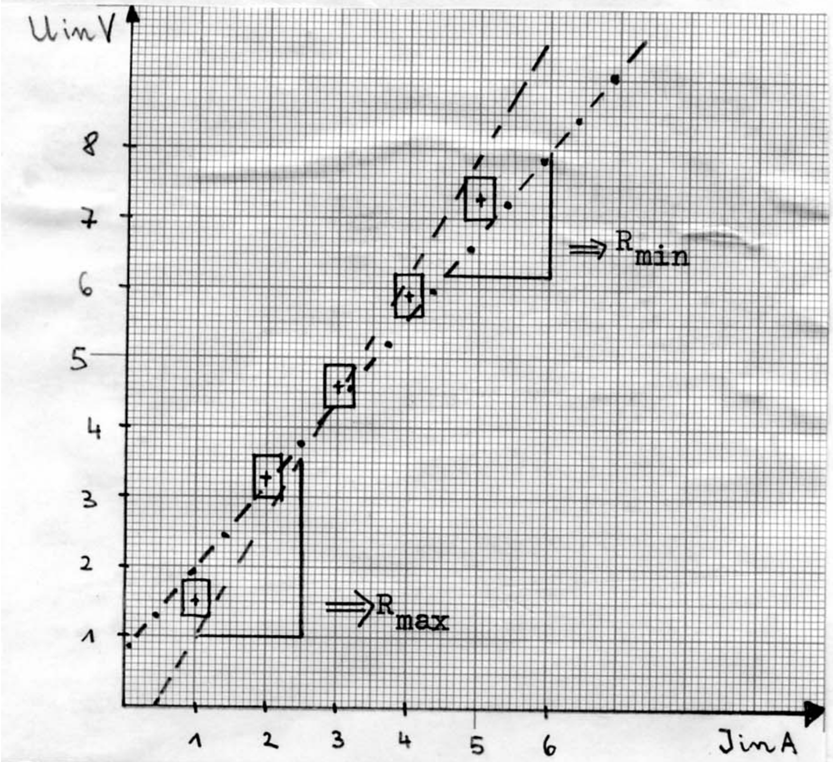


2. Eintragen der Geraden kleinster und größter Steigung. (Alle Fehlerrechtecke müssen berührt werden!) Dies ergibt: R_{max} (für maximale Steigung) und R_{min} (für minimale Steigung)

3. Daraus kann errechnet werden:

$$\bar{R} = \frac{R_{max}+R_{min}}{2}$$ Mittelwert

$$\Delta R = \frac{R_{max}-R_{min}}{2}$$ zugehöriger Fehler



$$R_{max} = \frac{2{,}5\ V}{1{,}5\ A} = 1{,}7\ \Omega$$

$$R_{min} = \frac{1{,}8\ V}{1{,}5\ A} = 1{,}2\ \Omega$$

$\bar{R} = 1{,}5$; $\Delta R = 0{,}3\ \Omega$

relativer Fehler:

$$\frac{\Delta R}{R} = 20\%$$